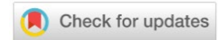
МЕХАНИКА
MECHANICS





УДК 539.42
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-4-365-375

Научная статья



EDN: JBOFSU

Применение метода двойной аппроксимации для построения матриц жесткости объемных конечных элементов

П.П. Гайджуров✉, **Н.А. Савельева**
Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
✉ gpp-161@yandex.ru

Аннотация
Введение. При численном решении задач теории упругости в трехмерной постановке методом конечных элементов применяются конечные элементы (КЭ) в форме параллелепипедов, призм и тетраэдров. Обычно построение матриц жесткости объемных КЭ базируется на принципе изопараметричности, суть которого состоит в использовании для аппроксимации геометрии и перемещений полиномов Лагранжа. В расчетной практике наибольшее распространение получили так называемые полилинейные изопараметрические КЭ с линейным законом аппроксимации перемещений. Главный недостаток данных элементов кроется в эффекте «*locking*» («запирания») при моделировании изгибных деформаций. Причем погрешность численного решения существенно возрастает в случае, когда конструкция, по сравнению с обычными деформациями, претерпевает значительные смещения как жесткое целое. Многолетний опыт решения задач механики деформируемого твердого тела методом конечных элементов показал, что существующие объемные КЭ обладают медленной сходимостью при моделировании изгибных деформаций пластин и оболочек. Цель настоящего исследования состоит в построении на основе метода двойной аппроксимации матриц жесткости полилинейных объемных КЭ повышенной точности, позволяющих учитывать жесткие смещения.
Материалы и методы. Для построения матриц жесткости объемных КЭ применен математический аппарат метода двойной аппроксимации, суть которого состоит в раздельном представлении функций распределения перемещений и деформаций внутри элемента. Хранение и обработка результирующей системы уравнений реализованы в алгоритмических терминах разреженных матриц. Разработка программного обеспечения и проведение вычислительных экспериментов осуществлены с использованием 64-х разрядной вычислительной платформы Microsoft Visual Studio 2013 и компилятора Intel® Parallel Studio XE 2019 со встроенным текстовым редактором Intel® Visual Fortran Composer XE 2019. Визуализация результатов расчетов выполнена с помощью дескрипторной графики пакета компьютерной математики Matlab. В качестве тестового образца использован объемный восьмиузловой КЭ SOLID185 программного комплекса ANSYS Mechanical.
Результаты исследования. Разработано математическое и программное обеспечение для исследования напряженно-деформированного состояния массивных конструкций при различных видах внешнего воздействия. На тестовых примерах с известными аналитическими решениями выполнена верификация авторизированного пакета прикладных программ. Показано, что построенные КЭ по точности удовлетворяют основным требованиям, предъявляемым к конечно-элементному моделированию пространственных задач теории упругости.
Обсуждение и заключение. Проведенное тестирование разработанного математического и программного обеспечения показало, что построенные на основе метода двойной аппроксимации конечные элементы успешно конкурируют с аналогичными объемными элементами SOLID185 программного комплекса ANSYS Mechanical. Предлагаемые элементы могут быть интегрированы в отечественные импортозамещающие программные комплексы, реализующие метод конечных элементов в форме метода перемещений.

Ключевые слова: метод конечных элементов, моментная схема метода конечных элементов, метод двойной аппроксимации, объемные конечные элементы, тестирование конечных элементов

Благодарности. Авторы выражают благодарность рецензентам, чья критическая оценка представленных материалов и высказанные предложения по их совершенствованию способствовали значительному повышению качества настоящей статьи.

Для цитирования. Гайджуров П.П., Савельева Н.А. Применение метода двойной аппроксимации для построения матриц жесткости объемных конечных элементов. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2023;23(4):365–375. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-4-365-375

Original article

Application of the Double Approximation Method for Constructing Stiffness Matrices of Volumetric Finite Elements

Peter P. Gaidzhurov , **Nina A. Saveleva**

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ gpp-161@yandex.ru

Abstract

Introduction. When numerically solving problems of elasticity theory in a three-dimensional formulation by the finite element method, finite elements (FE) in the form of parallelepipeds, prisms and tetrahedra are used. Regularly, the construction of stiffness matrices of volumetric FE is based on the principle of isoparametricity, which involves the Lagrange polynomials to approximate the geometry and displacements. In computational practice, the most widespread FE are the so-called multilinear isoparametric FE with a linear law of approximation of displacements. The main disadvantage of these elements lies in the "locking" effect when modulating bending deformations. Moreover, the error of the numerical solution increases drastically in the case when the structure, in comparison to conventional deformations, undergoes significant displacements as a rigid whole. Long-term experience in solving problems of deformable solid mechanics by the finite element method has shown that existing volumetric FE have slow convergence, specifically, when modeling bending deformations of plates and shells. This study aims at constructing stiffness matrices of multilinear volumetric FE of increased accuracy allowing for rigid displacements based on the double approximation method.

Materials and Methods. The mathematical apparatus of the double approximation method based on the principle of a separate representation of the distribution functions of displacements and deformations inside the element, was used to construct the stiffness matrices of volumetric FE. The storage and processing of the resulting system of equations was implemented in algorithmic terms of sparse matrices. Software development and computational experiments were carried out using the Microsoft Visual Studio 2013 64-bit computing platform and the Intel ® Parallel Studio XE 2019 compiler with the integrated Intel ® Visual Fortran Composer XE 2019 text editor. Visualization of the calculation results was performed using the descriptor graphics of the MATLAB computer mathematics package. A large eight-node SOLID185 CE of the ANSYS Mechanical software complex was used as a test sample.

Results. Mathematical tool and software were developed to study the stress-strain state of massive structures under various types of external actions. The authorized application software package was verified on test examples with known analytical solutions. It has been shown that the constructed FE accurately satisfy the basic requirements for finite element modeling of spatial problems of elasticity theory.

Discussion and Conclusion. The performed testing of the developed mathematical and program toolkit has shown that the finite elements constructed on the basis of the double approximation method can successfully compete with similar SOLID185 volumetric elements of the ANSYS Mechanical software complex. The proposed elements can be integrated into domestic import-substituting software systems that implement the finite element method in the form of the displacement method.

Keywords: finite element method, moment scheme of finite element method, double approximation method, volumetric finite elements, finite element testing

Acknowledgements. The authors appreciate the reviewers, whose critical assessment of the submitted materials and suggestions helped to significantly improve the quality of this article.

For citation. Gaidzhurov PP, Saveleva NA. Application of the Double Approximation Method for Constructing Stiffness Matrices of Volumetric Finite Elements. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2023;23(4):365–375. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-4-365-375

Введение. При конечно-элементном моделировании напряженно-деформированного состояния массивных тел используются объемные конечные элементы (КЭ) в форме параллелепипедов (гексаэдров), призм и тетраэдров, построение матриц жесткости которых выполнено, как правило, по изопараметрической технологии [1–5]. Вместе с тем известно, что полилинейные изопараметрические КЭ при использовании однослойной схемы неудовлетворительно моделируют изгибные деформации даже при существенном сгущении сетки [6, 7]. Суть данной проблемы состоит в эффекте «*locking*» («запирания») элемента вследствие так называемой деформации «ложного сдвига» [8, 9]. Для «улучшения» изопараметрических КЭ используют аппарат несовместных элементов, созданных путем введения дополнительных неузловых степеней свободы или вспомогательных аппроксимирующих полиномов [8]. Вместе с тем наиболее эффективным способом решения проблемы «заклинивания» КЭ является применение моментной схемы метода конечных элементов, теоретические основы которой были разработаны А.С. Сахаровым [7]. В последующем данный подход получил название метод двойной аппроксимации (МДА) [6]. Концептуально МДА базируется на раздельном представлении функций распределения перемещений и деформаций внутри элемента. Целью настоящего исследования является построение на базе МДА и тестирование новых объемных полилинейных КЭ, позволяющих моделировать поведение различных конструкций при различных видах внешнего воздействия.

Материалы и методы. Рассмотрим семейство объемных КЭ, состоящее из восьмиузлового и шестиузлового элементов, в глобальных декартовых осях z_m, $m = 1, 2, 3$ (рис. 1). Геометрию и перемещения КЭ представим в следующем виде:

$$z_m = \sum_{k=1}^{n_e} z_m^{(k)}\,\varphi(x_1, x_2, x_3)\,;\; u_m = \sum_{k=1}^{n_e} u_m^{(k)}\,\varphi(x_1, x_2, x_3)\,,$$

где $z_m^{(k)}$, $u_m^{(k)}$ — узловые координаты и перемещения; $\varphi_k(x_1, x_2, x_3)$ — «функции формы», представляющие собой произведение одномерных полиномов Лагранжа первой степени; x_1, x_2, x_3 — локальные в общем случае неортогональные координаты КЭ; n_e — число узлов элемента. Для базового восьмиузлового элемента (рис. 1 *а*) $n_e = 8$ «функции формы» определяем по формуле:

$$\varphi_k\,(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8}\prod_{r=1}^{3}(1 + p_{rk}\,x_r)\,, \tag{1}$$

здесь p_{rk} — координаты узлов в локальных осях. Значения p_{rk} задаем в форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

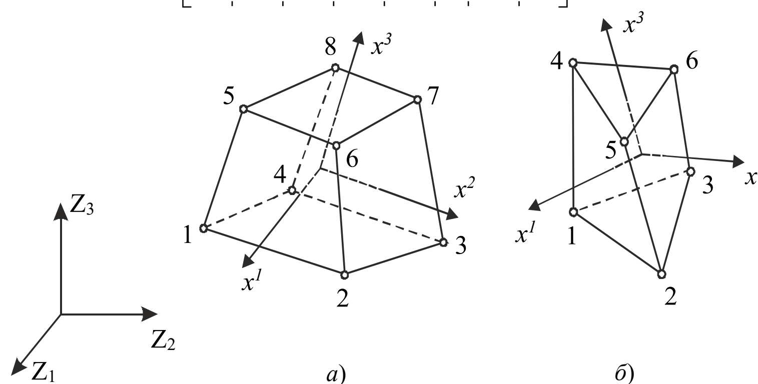


Рис. 1. Объемные КЭ: *а* — восьмиузловой; *б* — шестиузловой

Зависимость между ковариантными компонентами тензора деформаций в локальном базисе и перемещениями в глобальных осях имеет вид [7]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(z_{m,j}\,u_{m,i} + z_{m,i}\,u_{m,j} \right),$$

(суммирование по повторяющемуся индексу)

где $z_{m,s} = \partial z_m / \partial x_s$; $u_{m,s} = \partial u_m / \partial x_s$, $s = i, j$.

Связь между вектором деформаций $\{\varepsilon\}$ и вектором узловых перемещений $\{w\}$ представим в матричной форме:

$$\{\varepsilon\} = [D]\{w\},$$

где блочная матрица $\underset{(6\times n_e)}{[D]} = \left[[D]_1 [D]_2 \ldots [D]_{n_e}\right]$;

субматрица

$$\underset{(6\times 3)}{[D]_k} = \left[\{D^{(1)}\}_k \{D^{(2)}\}_k \{D^{(3)}\}_k\right], \; k = 1, 2, \ldots, n_e .$$

Выражения для вектор-столбцов рассматриваемых КЭ имеют следующий вид [10]: восьмиузловой элемент (рис. 1 *а*):

$$\{D^{(m)}\}_k = \frac{1}{8}\left\{\begin{array}{c} p_{1k}\left[\tilde{z}_{m,1} + (\tilde{z}_{m,12} + \tilde{z}_{m,1} p_{2k}) x_2 + (\tilde{z}_{m,13} + \tilde{z}_{m,1} p_{3k}) x_3 + \right. \\ \left. + (\tilde{z}_{m,123} + \tilde{z}_{m,12} p_{3k} + \tilde{z}_{m,13} p_{2k} + \tilde{z}_{m,1} p_{2k} p_{3k}) x_2 x_3\right] \\ \hdashline p_{2k}\left[\tilde{z}_{m,2} + (\tilde{z}_{m,12} + \tilde{z}_{m,2} p_{1k}) x_1 + (\tilde{z}_{m,23} + \tilde{z}_{m,2} p_{3k}) x_3 + \right. \\ \left. + (\tilde{z}_{m,123} + \tilde{z}_{m,12} p_{3k} + \tilde{z}_{m,23} p_{1k} + \tilde{z}_{m,2} p_{1k} p_{3k}) x_1 x_3\right] \\ \hdashline p_{3k}\left[\tilde{z}_{m,3} + (\tilde{z}_{m,13} + \tilde{z}_{m,3} p_{1k}) x_1 + (\tilde{z}_{m,23} + \tilde{z}_{m,3} p_{2k}) x_2 + \right. \\ \left. + (\tilde{z}_{m,123} + \tilde{z}_{m,13} p_{2k} + \tilde{z}_{m,23} p_{1k} + \tilde{z}_{m,3} p_{1k} p_{2k}) x_1 x_2\right] \\ \hdashline \tilde{z}_{m,1} p_{2k} + \tilde{z}_{m,2} p_{1k} + (\tilde{z}_{m,13} p_{2k} + \tilde{z}_{m,1} p_{2k} p_{3k} + \tilde{z}_{m,23} p_{1k} + \\ + \tilde{z}_{m,2} p_{1k} p_{3k}) x_3 \\ \hdashline \tilde{z}_{m,1} p_{3k} + \tilde{z}_{m,3} p_{1k} + (\tilde{z}_{m,12} p_{3k} + \tilde{z}_{m,1} p_{2k} p_{3k} + \tilde{z}_{m,23} p_{1k} + \\ + \tilde{z}_{m,3} p_{1k} p_{2k}) x_2 \\ \hdashline \tilde{z}_{m,2} p_{3k} + \tilde{z}_{m,3} p_{2k} + (\tilde{z}_{m,12} p_{3k} + \tilde{z}_{m,2} p_{1k} p_{3k} + \tilde{z}_{m,13} p_{2k} + \\ + \tilde{z}_{m,3} p_{1k} p_{2k}) x_1 \end{array}\right\}; \qquad (2)$$

шестиузловой элемент (рис. 1 *б*):

$$\{D^{(m)}\}_k = \frac{1}{8}\left\{\begin{array}{c} \tilde{z}_{m,1}\tilde{\varphi}_{k,1} + (\tilde{z}_{m,13}\tilde{\varphi}_{k,1} + \tilde{z}_{m,1}\tilde{\varphi}_{k,13}) x_3 \\ \hdashline \tilde{z}_{m,2}\tilde{\varphi}_{k,2} + (\tilde{z}_{m,23}\tilde{\varphi}_{k,2} + \tilde{z}_{m,2}\tilde{\varphi}_{k,23}) x_3 \\ \hdashline \tilde{z}_{m,3}\tilde{\varphi}_{k,3} + (\tilde{z}_{m,13}\tilde{\varphi}_{k,3} + \tilde{z}_{m,3}\tilde{\varphi}_{k,13}) x_1 + \\ + (\tilde{z}_{m,23}\tilde{\varphi}_{k,3} + \tilde{z}_{m,3}\tilde{\varphi}_{k,23}) x_2 \\ \hdashline \tilde{z}_{m,1}\tilde{\varphi}_{k,2} + \tilde{z}_{m,2}\tilde{\varphi}_{k,1} + (\tilde{z}_{m,13}\tilde{\varphi}_{k,2} + \tilde{z}_{m,1}\tilde{\varphi}_{k,23} + \\ + \tilde{z}_{m,23}\tilde{\varphi}_{k,1} + \tilde{z}_{m,2}\tilde{\varphi}_{k,13}) x_3 \\ \hdashline \tilde{z}_{m,1}\tilde{\varphi}_{k,3} + \tilde{z}_{m,3}\tilde{\varphi}_{k,1} \\ \hdashline \tilde{z}_{m,2}\tilde{\varphi}_{k,3} + \tilde{z}_{m,3}\tilde{\varphi}_{k,2} \end{array}\right\}. \qquad (3)$$

Здесь введены обозначения:

$$\tilde{z}_{m,\alpha} = \left.\frac{\partial z_m}{\partial x_\alpha}\right|_{x_1 = x_2 = x_3 = 0}, \; \tilde{z}_{m,\alpha\beta} = \left.\frac{\partial^2 z_m}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right|_{x_1 = x_2 = x_3 = 0};$$

$$\tilde{z}_{m,123} = \left.\frac{\partial^3 z_m}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}\right|_{x_1 = x_2 = x_3 = 0}.$$

$$\tilde{\varphi}_{k,\alpha} = \left.\frac{\partial \tilde{\varphi}_k}{\partial x_\alpha}\right|_{x_1 = x_2 = x_3 = 0}; \; \tilde{\varphi}_{k,\alpha\beta} = \left.\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_k}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right|_{x_1 = x_2 = x_3 = 0}; \; \alpha, \beta = 1, 2, 3 .$$

Выражения для «функций формы» $\tilde{\varphi}_k(x_1, x_2, x_3)$ шестиузлового КЭ, полученные на основании полинома (1) с помощью принципа «вырождения», имеют следующий вид:

$$\tilde{\varphi}_1 = \frac{1}{8}(1 + p_{11}x_1)(1 + p_{21}x_2)(1 + p_{31}x_3);$$

$$\tilde{\varphi}_2 = \frac{1}{8}(1 + p_{12}x_1)(1 + p_{22}x_2)(1 + p_{32}x_3);$$

$$\tilde{\varphi}_3 = \frac{1}{8}\Big[(1+p_{13}x_1)(1+p_{23}x_2)(1+p_{33}x_3)+(1+p_{14}x_1)(1+p_{24}x_2)(1+p_{34}x_3)\Big];$$

$$\tilde{\varphi}_4 = \frac{1}{8}(1+p_{15}x_1)(1+p_{25}x_2)(1+p_{35}x_3);$$

$$\tilde{\varphi}_5 = \frac{1}{8}(1+p_{16}x_1)(1+p_{26}x_2)(1+p_{36}x_3);$$

$$\tilde{\varphi}_6 = \frac{1}{8}\Big[(1+p_{17}x_1)(1+p_{27}x_2)(1+p_{37}x_3)+(1+p_{18}x_1)(1+p_{28}x_2)(1+p_{38}x_3)\Big].$$

Формулы (2) и (3) являются основой для построения матриц жесткости рассматриваемых КЭ. Соответствующее программное обеспечение разработано на базе вычислительной платформы Microsoft Visual Studio и компилятора Intel® Parallel Studio XE с встроенным текстовым редактором Intel® Visual Fortran Composer XE. Процессы хранения и обработки глобальной матрицы жесткости реализованы в терминах разреженных матриц [11]. Для визуализации результатов расчетов использована дескрипторная графика компьютерной системы Matlab.

Результаты исследования. Исследование точности и сходимости разработанного конечно-элементного алгоритма выполнили на тестовых примерах, имеющих аналитическое решение. В тестовых примерах приведены численные решения, полученные с использованием разработанных элементов и аналогичного по размерности элемента SOLID185 программного комплекса ANSYS Mechanical [5, 11]. Ниже приведены примеры, подобранные таким образом, чтобы в них присутствовало сочетание изгибных деформаций и жестких смещений КЭ.

Пример 1. Разрезное кольцо, жестко закрепленное в одном сечении и загруженное сосредоточенной силой на свободном конце. Расчетная схема кольца показана на рис. 2. Исходные данные: средний радиус R = 0,2 м; размеры поперечного сечения 0,2×0,2 см; модуль упругости $E = 10^{11}$ Н/м^2; коэффициент Пуассона ν = 0,3; сосредоточенная сила F = 10 Н.

Прогиб в точке приложения силы по теории кривых стержней (точное решение) составляет [7]:

$$f = \frac{F\pi R^3}{EJ} = \frac{10\cdot 3,14\cdot 0,2^3}{1\cdot 10^{11}\cdot 8,333\cdot 10^{-10}} = -0,00302 \text{ м}.$$

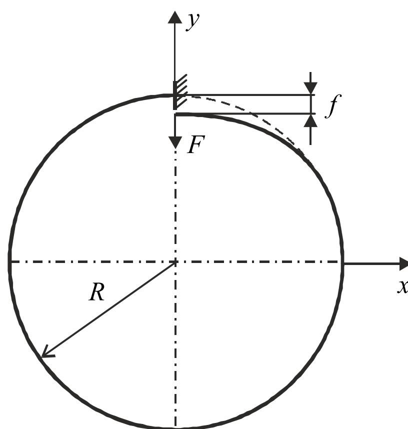


Рис. 2. Расчетная схема разрезного кольца

Результаты сходимости представлены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты сходимости для разрезного кольца

Сетка	f/δ, м / %	
	МДА	ANSYS
2×2×32	–0,00170 / 44	–0,000433 / 86
2×2×64	–0,00292 / 3,3	–0,00125 / 59
2×2×128	–0,00293 / 3	–0,00251 / 17

В таблице 1 в числителе приведено значение прогиба *f*, в знаменателе — относительная погрешность δ.

Визуализация перемещений u_y, полученная на базе МДА и ANSYS на сетке 2×2×64, представлена на рис. 3 и 4. Отметим, что поле вертикальных перемещений, полученное с помощью ANSYS, не отражает зоны с экстремальным значением $u_y = -0{,}00314$ м, показанной на рис. 3 стрелкой.

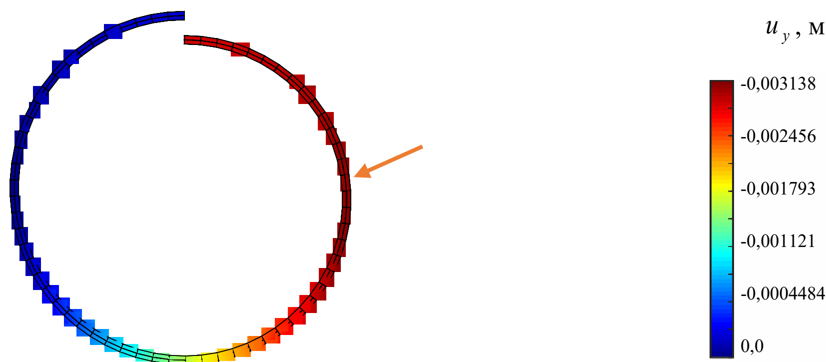


Рис. 3. Картина распределения u_y (МДА)

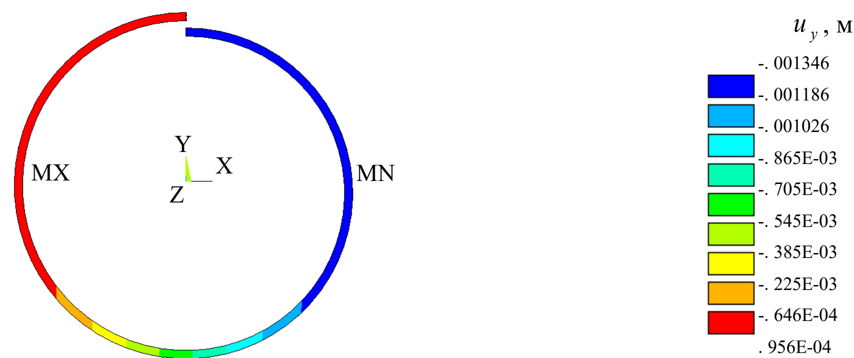


Рис. 4. Картина распределения u_y (ANSYS)

В данном примере особенно отчетливо прослеживается важность учета жестких смещений.

Пример 2. Квадратная пластина, жестко защемленная по контуру и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой. Исходные данные: длина стороны $a = 1$ м; толщина $h = 0{,}01$ м; модуль упругости $E = 10^5$ Н/м^2; коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}25$.

Точное значение прогиба в центре пластины определяется по формуле [12]:

$$u_q = \alpha \frac{q a^4}{D},$$

где $\alpha = 0{,}00126$; $D = \dfrac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость; $q = 0{,}00888889$ Н/м^2 — интенсивность распределенной нагрузки. Точная величина u_q (в метрах) равна коэффициенту α.

В данном примере рассматривалась ¼ часть пластины с учетом условий симметрии. Результаты сходимости в виде графиков $u_q \sim s$ для однослойной и двухслойной моделей представлены на рис. 5 и 6. Здесь и далее под слоями подразумевается разбивка пластины на КЭ по толщине. На этих рисунках значения параметра s 1, 2, 3, 4 соответствуют сеткам: 4×4, 8×8, 16×16, 32×32. Приведенные графики отображают результаты решения, полученные с помощью ANSYS (линия 1) и МДА (линия 2). Горизонтальная линия, обозначенная цифрой 3, соответствует точному решению.

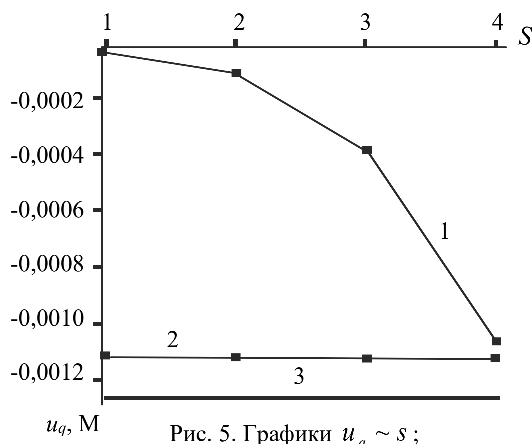


Рис. 5. Графики $u_q \sim s$;
однослойная схема

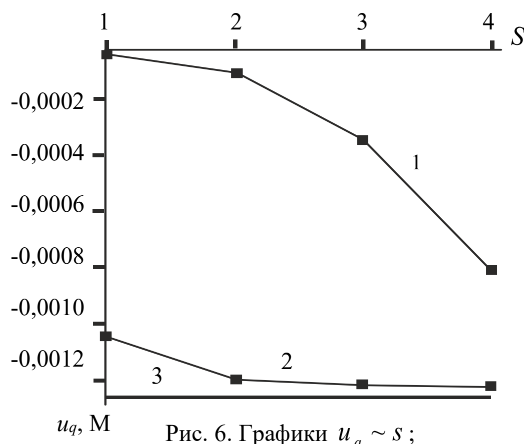


Рис. 6. Графики $u_q \sim s$;
двухслойная схема

Из рис. 5 следует, что при однослойной схеме разбивки значения относительной погрешности на сетке 32×32 составляют: SOLID185 — 16 %; МДА — 10,5 %. При использовании двухслойной схемы (рис. 6) на сетке 32×32 имеем: SOLID185 — 36 %; МДА — 2,8 %.

Патч-тестирование КЭ выполнено для схемы разбивки 16×16×2 с искажением сетки (рис. 7). Результаты патч-теста в виде картин распределения прогибов u_z приведены на рис. 8 и 9.

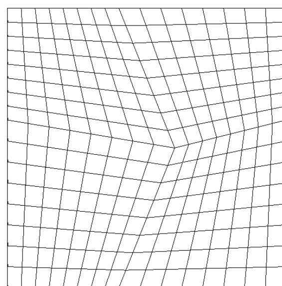
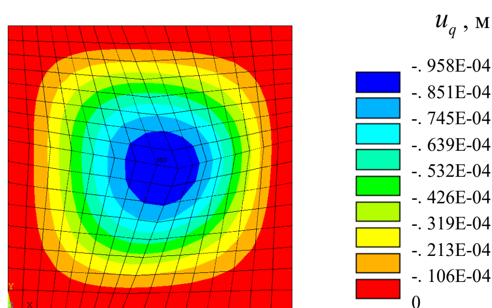


Рис. 7. Схема разбивки пластины для патч-теста



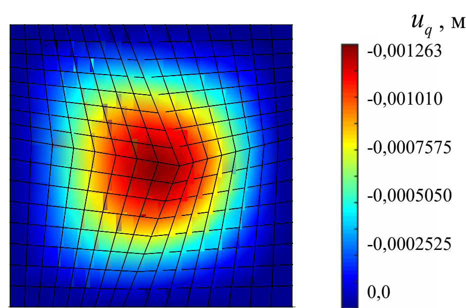


Рис. 8. Распределение u_q (SOLID185)

Рис. 9. Распределение u_q (МДА)

Как видно из рисунков, искажение сетки при использовании SOLID185 приводит к более заметной асимметрии поля u_z, чем при использовании МДА. При этом значение максимального прогиба для КЭ МДА $u_q = 0{,}001263$ м совпадает с точным решением.

Пример 3. Круглая пластина, жестко защемленная по контуру и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой. Радиус и толщина пластины: $R = 1$ м; $h = 0{,}01$ м. Механические константы аналогичны данным примера 2.

Точное значение прогиба в центре пластины определяется по формуле [12]:

$$u_q = \frac{1}{64}\frac{q\,a^4}{D}.$$

При значении интенсивности распределенной нагрузки $q = 0{,}00888889$ Н/м^2 значение $u_q = 0{,}01563$ м.

В процессе тестирования были использованы два варианта дискретизации ¼ части пластины (сектора) на КЭ. В первом варианте три стороны сектора делились на равное число отрезков. Второй вариант базировался на радиальной регулярной схеме разбивки сектора. При этом число элементов вдоль радиуса и циркульной части сектора принималось одинаковым. Рассмотренные варианты дискретизации сектора для сетки 32×32 приведены на рис. 10.



Рис. 10. Варианты дискретизации сектора круглой пластины на КЭ: 1 — равномерная разбивка трех сторон сектора; 2 — радиальная регулярная разбивка

Результаты сходимости в виде графиков $u_q \sim s$ для дискретизации ¼ части пластины по варианту 1 при однослойной и двухслойной схемах разбивки представлены соответственно на рис. 11, 12 и рис. 13, 14.

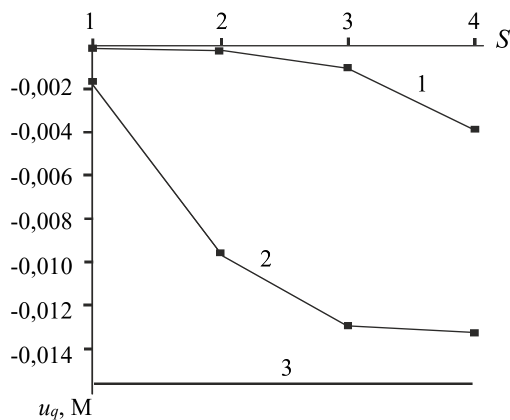


Рис. 11. Графики $u_q \sim s$ для варианта 1; однослойная схема

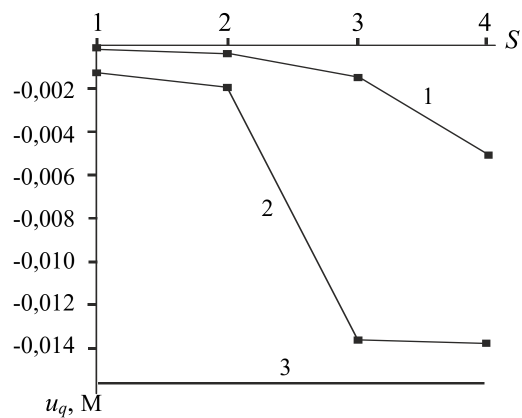


Рис. 12. Графики $u_q \sim s$ для варианта 2; однослойная схема

На этих рисунках значения параметра s 1, 2, 3, 4 соответствуют сеткам 4×4, 8×8, 16×16, 32×32. Как и в примере 1, линия 1 соответствует решению на базе SOLID185, а линия 2 — МДА. Горизонтальная линия, обозначенная цифрой 3, соответствует точному решению.

Из приведенных графиков следует, что элемент, построенный по моментной схеме на сетке 32×32×2 вариант 2, имеет относительную погрешность 4 %.

Картины визуализации поля распределения вертикальных перемещений u_z для МДА и SOLID185 при радиальной схеме разбивки ¼ пластины (сетка 32×32×2) показаны соответственно на рис. 15 и 16.

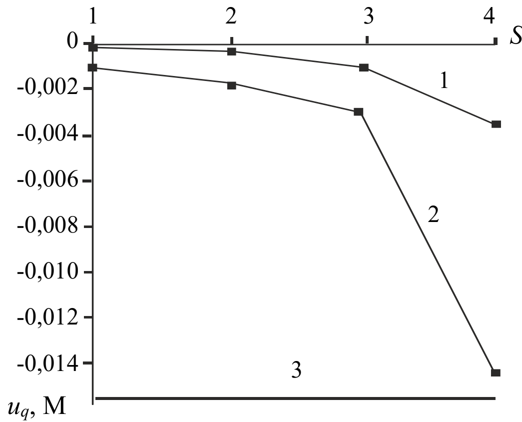


Рис. 13. Графики $u_q \sim s$ для варианта 1; двухслойная схема

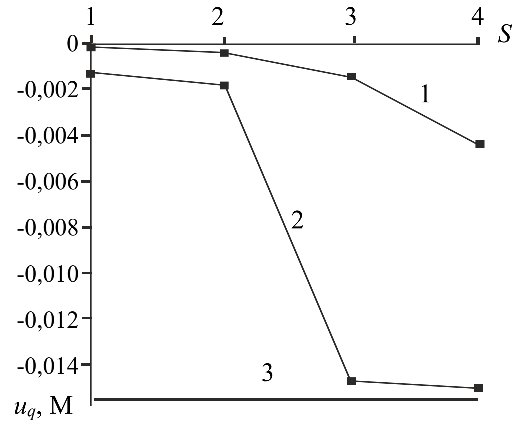


Рис. 14. Графики $u_q \sim s$ для варианта 2; двухслойная схема

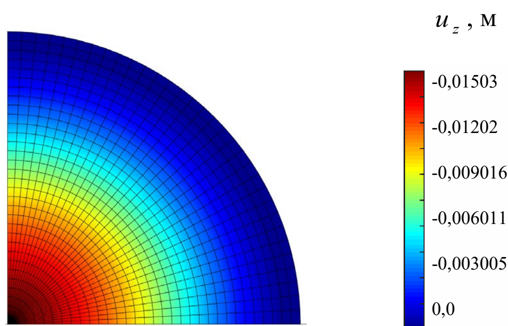


Рис. 15. Распределение u_z (МДА)

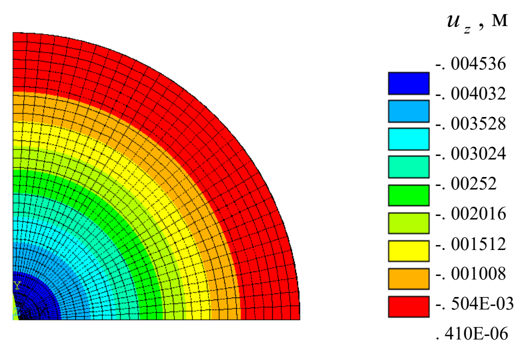


Рис. 16. Распределение u_z (SOLID185)

Из приведенных рисунков видно, что несмотря на качественное совпадение картин u_z, относительные погрешности для максимального прогиба составляют: МДА — 3,8 %; SOLID185 — 71 %. Такая значительная погрешность при использовании SOLID185 объясняется тем, что разработчики использовали для аппроксимации геометрии и перемещений шестиузлового КЭ «функции формы» аналогичные функциям, примененным для восьмиузлового элемента, т. е. без принципа «вырождения» [7].

Обсуждение и заключение. Построенные на базе метода двойной аппроксимации матрицы жесткостей объемных полилинейный конечных элементов позволяют моделировать напряженно-деформированное состояние строительных конструкций произвольной геометрии при различных видах внешнего воздействия. Принципиальным отличием предлагаемой концепции от ранее известных конечно-элементных технологий является то, что перемещения в данном случае задаются в глобальных координатах, а компоненты тензора деформаций определяются в местных, в общем случае, неортогональных осях.

На тестовых примерах показано, что объемные конечные элементы, построенные по методу двойной аппроксимации, обладают устойчивой сходимостью и успешно конкурируют с элементом аналогичного типа SOLID185 вычислительного комплекса ANSYS Mechanical.

Разработанное математическое обеспечение может быть внедрено в отечественные импортозамещающие программные комплексы, реализующие метод конечных элементов в форме метода перемещений.

Список литературы

1. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method,* Fifth edition. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann; 2000. 708 p.

2. David V. Hutton. *Fundamentals of Finite Element Analysis*. New York, NY: McGraw Hill Companies; 2004. 494 p. URL: https://wp.kntu.ac.ir/fz_kalantary/Source/Finite%20element%20method/BooksNumerical/Fundamentals%20of%20Finite%20Element%20Analysis,%20Hutton%20(2004).pdf (дата обращения: 15.08.2023).

3. Daryl L. Logan. *A First Course in the Finite Element Method*. New York, NY: CL Engineering; 2011. 836 p. URL: https://kntu.ac.ir/DorsaPax/userfiles/file/Mechanical/OstadFile/dr_nakhodchi/DarylL.LoganAFirstCourse.pdf (дата обращения: 15.08.2023).

4. Carlos A. Felippa. *Introduction to Finite Element Methods*. Boulder, CO: University of Colorado; 2004. 791 p. URL: https://vulcanhammernet.files.wordpress.com/2017/01/ifem.pdf (дата обращения: 15.08.2023).

5. Saeed Moaveni. *Finite Element Analysis. Theory and Application with ANSYS*. Hoboken, NJ: Prentice Hall; 1999. 527 p. URL: http://ftp.demec.ufpr.br/disciplinas/TM738/Livros/Finite%20Element%20Analysis,%20Theory%20and%20application%20with%20ANSYS,%20.pdf (дата обращения: 15.08.2023).

6. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. *Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций.* Москва: Физматлит; 2006. 391 с.

7. David V. Hutton. *Fundamentals of Finite Element Analysis*. New York, NY: McGraw-Hill; 2004. 505 p. URL: https://wp.kntu.ac.ir/fz_kalantary/Source/Finite%20element%20method/BooksNumerical/Fundamentals%20of%20Finite%20Element%20Analysis,%20Hutton%20(2004).pdf (дата обращения: 15.08.2023).

8. Miguel Luiz Bucalem, Klaus-Jürgen Bathe. *The Mechanics of Solids and Structures – Hierarchical Modeling and the Finite Element Solution*. New York, NY: Springer; 2011. 597 p.

9. Jacob Fish, Ted Belytschko. *A First Course in Finite Elements*. Hoboken, NJ: Wiley; 2007. 319 p.

10. Гайджуров П.П. *Конечные элементы повышенной точности для решения трехмерных задач теории упругости*. *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки.* 2003;(1):54–57. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/konechnye-elementy-povyshennoy-tochnosti-dlya-resheniya-trehmernyh-zadach-teorii-uprugosti/viewer (дата обращения: 15.08.2023).

11. Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф. *ANSYS для инженеров. Справочное пособие*. Москва: Машиностроение; 2004. 512 с. URL: https://www.researchgate.net/profile/AKravchuk/publication/262729610_ANSYS_-dla_inzenerov/links/0f31753b4294b13fc9000000/ANSYS-dlainzenerov.pdf (дата обращения: 15.08.2023).

12. Madenci E., Guven I. *The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS*. New York, NY: Springer; 2015. 664 p.

References

1. Zienkiewicz OC, Taylor RL. *The Finite Element Method,* Fifth edition. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann; 2000. 708 p.

2. David V Hutton. *Fundamentals of Finite Element Analysis*. New York, NY: The McGraw Hill Companies; 2004. 494 p. URL: https://wp.kntu.ac.ir/fz_kalantary/Source/Finite%20element%20method/BooksNumerical/Fundamentals%20of%20Finite%20Element%20Analysis,%20Hutton%20(2004).pdf (accessed: 15.08.2023).

3. Daryl L Logan. *A First Course in the Finite Element Method*. New York, NY: CL Engineering; 2011. 836 p. URL: https://kntu.ac.ir/DorsaPax/userfiles/file/Mechanical/OstadFile/dr_nakhodchi/DarylL.LoganAFirstCourse.pdf (accessed: 15.08.2023).

4. Carlos A Felippa. *Introduction to Finite Element Methods*. Boulder, CO: University of Colorado; 2004. 791 p. URL: https://vulcanhammernet.files.wordpress.com/2017/01/ifem.pdf (accessed: 15.08.2023).

5. Saeed Moaveni. *Finite Element Analysis. Theory and Application with ANSYS*. Hoboken, NJ: Prentice Hall; 1999. 527 p. URL: http://ftp.demec.ufpr.br/disciplinas/TM738/Livros/Finite%20Element%20Analysis,%20Theory%20and%20application%20with%20ANSYS,%20.pdf (accessed: 15.08.2023).

6. Golovanov AI, Tyuleneva ON, Shigabutdinov AF. *Finite Element Method in Statics and Dynamics of Thin-Walled Structures.* Moscow: Fizmatlit; 2006. 391 p. (In Russ.)

7. David V Hutton. *Fundamentals of Finite Element Analysis*. New York, NY: McGraw-Hill; 2004. 505 p. URL: https://wp.kntu.ac.ir/fz_kalantary/Source/Finite%20element%20method/BooksNumerical/Fundamentals%20of%20Finite%20Element%20Analysis,%20Hutton%20(2004).pdf (accessed: 15.08.2023).

8. Miguel Luiz Bucalem, Klaus-Jürgen Bathe. *The Mechanics of Solids and Structures – Hierarchical Modeling and the Finite Element Solution*. New York, NY: Springer; 2011. 597 p.

9. Jacob Fish, Ted Belytschko. *A First Course in Finite Elements*. Hoboken, NJ: Wiley; 2007. 319 p.

10. Gaidzhurov PP. Finite Elements of Increased Accuracy for Solving 3D Problems of Elasticity Theory. *University News. North-Caucasian Region. Technical Sciences Series.* 2003;(1):54–57. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/konechnye-elementy-povyshennoy-tochnosti-dlya-resheniya-trehmernyh-zadach-teorii-uprugosti/viewer (accessed: 15.08.2023). (In Russ.)

11. Chigarev AV, Kravchuk AS, Smalyuk AF. *ANSYS for Engineers. Moscow*: Mashinostroenie; 2004. 512 p. URL: https://www.researchgate.net/profile/AKravchuk/publication/262729610_ANSYS_dla_inzenerov/links/0f31753b4294b13fc9000000/ANSYS-dla-inzenerov.pdf (accessed: 15.08.2023). (In Russ.)

12. Madenci E, Guven I. *The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS*. New York, NY: Springer; 2015. 664 p.

Поступила в редакцию 29.09.2023
Поступила после рецензирования 31.10.2023
Принята к публикации 18.11.2023

Об авторах:

Петр Павлович Гайджуров, доктор технических наук, профессор кафедры строительной механики и теории сооружений Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ORCID, SPIN-код: 6812-9718, gpp-161@yandex.ru

Нина Александровна Савельева, старший преподаватель кафедры строительной механики и теории сооружений Донского государственного технического университета, (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), SPIN-код: 8437-8080, ORCID, ninasav86@mail.ru

Заявленный вклад соавторов

П.П. Гайджуров — постановка задачи, выбор метода решения и построение математической и компьютерной модели, обсуждение результатов.

Н.А. Савельева — проведение обзора, проведение расчетов, обсуждение результатов.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Received 29.09.2023
Revised 31.10.2023
Accepted 18.11.2023

About the Authors:

Peter P. Gaidzhurov, Dr.Sci. (Eng.), Professor of the Structural Mechanics and Theory of Structures Department, Don State Technical University (1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), SPIN-code: 6812-9718, ORCID, gpp-161@yandex.ru

Nina A. Saveleva, Senior lecturer of the Structural Mechanics and Theory of Structures Department, Don State Technical University (1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), SPIN-code: 8437-8080, ORCID, ninasav86@mail.ru

Claimed contributorship:

PP Gaidzhurov: problem statement, selection of solution method and building of mathematical and computer model, discussion of the results.

NA Saveleva: conducting a review, computational analysis, discussion of the results.

Conflict of interest statement: the authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.